

Научная статья

УДК 517.951 + 517.983

DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-152-175

ФРЕДГОЛЬМОВЫ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Ани Гагиковна Туманян

Российско-Армянский Университет,
Siemens Industry Software
Ереван, Армения

ani.tumanyan@rau.am; <https://orcid.org/0000-0003-3991-7900>

Аннотация

В работе исследуются нормальная разрешимость, фредгольмовость и спектральные свойства регулярных гипоеллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами. Установлен критерий фредгольмовости для рассматриваемого класса операторов в мультианизотропных соболевских пространствах в \mathbb{R}^n , а также дано описание существенного спектра таких операторов.

Ключевые слова и фразы

фредгольмов оператор, регулярный гипоеллиптический оператор, существенный спектр, мультианизотропные весовые пространства.

Источник финансирования

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по высшему образованию и науке МОНКС РА N25RG-1A205.

Для цитирования

Туманян А. Г. Фредгольмовы и спектральные свойства для одного класса гипоеллиптических операторов // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 2, С. 152-175. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-152-175

Fredholm and spectral properties for one class of hypoelliptic operators

Ani G. Tumanyan

Russian-Armenian University,
Siemens Industry Software
Yerevan, Armenia

ani.tumanyan@rau.am

Abstract

In this paper, we study the normal solvability, Fredholm property, and spectral characteristics of regular hypoelliptic operators with special variable coefficients. Fredholm criteria are established for the considered class of operators in multianisotropic Sobolev spaces in \mathbb{R}^n , and the essential spectrum of such operators is described.

Keywords

Fredholm operator, regular hypoelliptic operator, essential spectrum, multianisotropic weighted space.

Funding

This work was supported by the Science Committee of the Ministry of Education, Science, Culture and Sports of the Republic of Armenia (Grant No. 25RG-1A205)

For citation

Tumanyan A. Fredholm and spectral properties for one class of hypoelliptic operators // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 2, P. 152-175. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-152-175

§ 1. Введение и основные определения

Регулярные гипоэллиптические операторы являются специальным подклассом гипоэллиптических операторов по Хёрмандеру и имеют множество важных приложений (см. [1]). Характеристические многочлены этих операторов являются мультиквазиэллиптическими, поэтому они являются естественным обобщением эллиптических, параболических, $2b$ -параболических и квазиэллиптических операторов. Эти операторы были введены в 1960-х — 1970-х годах и изучались многими авторами: С. М. Никольским [2], В. П. Михайловым [3], Дж. Фриберггом [4], Л. Р. Волевичем, С.

Г. Гиндикиным [5], Г. Г. Газаряном [6] и другими. Анализ регулярных гипоеллиптических операторов связан с определёнными трудностями, так как соответствующие характеристические многочлены не являются однородными, как в эллиптическом случае. Условия разрешимости, априорные оценки, фредгольмовы и спектральные свойства изучались для специальных классов гипоеллиптических операторов в различных функциональных пространствах, однако большинство результатов относятся к эллиптическим и квазиэллиптическим операторам.

Фредгольмовость эллиптических операторов в различных функциональных пространствах исследована в работах Л. А. Багирова [7], Р. Б. Локкарта, Р. С. Маккоуна [8, 9], Э. Шроэ [10] и других. Априорные оценки и фредгольмова разрешимость квазиэллиптических операторов изучены в работах Л. А. Багирова [11], Г. А. Карапетяна, А. А. Дарбиняна [12], А. А. Дарбиняна и А. Г. Туманян [13, 14, 15] и других. Изоморфные свойства для квазиэллиптических операторов с постоянными коэффициентами на специальной шкале весовых соболевских пространств получены в работах Г. В. Демиденко (см. [16, 17, 18]).

Л. Родино, П. Боггиатто, Э. Бузано исследовали фредгольмовы и спектральные свойства специальных классов псевдодифференциальных операторов в мультианизотропных пространствах с полиномиальными весами (см. [19]). Спектральные свойства гипоеллиптических операторов типа Шрёдингера, а также гипоеллиптических псевдодифференциальных операторов, являющихся относительно ограниченными возмущениями операторов с постоянными коэффициентами, изучались в работах Э. Бузано и А. Зигиотто (см. [20, 21]). Условия фредгольмовости для регулярных гипоеллиптических операторов на шкалах $H_q^{k,\mathcal{R},p}(\mathbb{R}^n)$ со специальными весовыми функциями q установлены в работах [22, 23].

В данной работе исследуются нормальная разрешимость, фредгольмовость и спектральные свойства регулярных гипоеллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами. Установлены априорные оценки для дифференциальных операторов, действующих в мультианизотропных соболевских пространствах. Установлены необходимые и достаточные условия фредгольмовости для рассматриваемого класса операторов в мультианизотропных пространствах $H_q^{k,\mathcal{R},p}(\mathbb{R}^n)$ в случае $q \equiv 1$. Изучены свойства гладкости решений и инвариантность индекса на рассматриваемой шкале мультианизотропных пространств. В работе получено описание существенного спектра таких операторов. Спектральные свойства рассматриваемых операторов отличаются от свойств операторов на весовых шкалах, изученных в предыдущих работах (см. [22, 23, 24]).

Определение 1.1. Линейный ограниченный оператор A , определённый на всём банаховом пространстве X и действующий в банахово простран-

ство Y , назовём n -нормальным оператором, если выполняются следующие условия:

1. образ оператора A замкнут ($\text{Im}(A) = \overline{\text{Im}(A)}$);
2. ядро оператора A конечномерно ($\dim \text{Ker}(A) < \infty$).

Оператор A назовём *фредгольмовым*, если выполняются условия 1-2 и

3. коядро оператора A конечномерно ($\dim \text{coker}(A) = \dim Y / \text{Im}(A) < \infty$).

Определение 1.2. Пусть A — замкнутый оператор с плотной областью определения в банаховом пространстве X . *Существенным спектром* $\sigma_e(A)$ назовём множество комплексных чисел λ , для которых $A - \lambda I$ не является фредгольмовым.

Разность между размерностями ядра и коядра оператора A называется индексом оператора:

$$\text{ind}(A) = \dim \text{Ker}(A) - \dim \text{coker}(A).$$

Определение 1.3. Для линейного ограниченного оператора A , действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y ($A : X \rightarrow Y$), линейные ограниченные операторы $R_1 : Y \rightarrow X$ и $R_2 : Y \rightarrow X$ назовём, соответственно, *левым и правым регуляризаторами*, если выполняются следующие условия: $R_1 A = I_X + T_1$, $A R_2 = I_Y + T_2$, где I_X, I_Y — единичные операторы, а $T_1 : X \rightarrow X$ и $T_2 : Y \rightarrow Y$ — компактные операторы. Линейный ограниченный оператор $R : Y \rightarrow X$ назовём *регуляризатором* для оператора $A : X \rightarrow Y$, если он одновременно является и левым, и правым регуляризатором.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и \mathbb{R}^n — n -мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_+^n, \mathbb{N}^n$, соответственно, множества n -мерных мультииндексов и n -мерных мультииндексов с натуральными компонентами. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}_+^n$ — некоторое конечное множество мультииндексов, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{N})$ — минимальный выпуклый многогранник, содержащий элементы из \mathcal{N} .

Определение 1.4. Многогранник \mathcal{R} назовём *вполне правильным*, если
 а) \mathcal{R} является полным многогранником: \mathcal{R} имеет вершины в начале координат и на каждой оси координат \mathbb{R}^n , отличные от начала координат;
 б) все компоненты внешних нормалей $(n - 1)$ -мерных некоординатных граней \mathcal{R} положительные.

Пусть \mathcal{R} — вполне правильный многогранник. Обозначим через \mathcal{R}_j^{n-1} , $j = 1, \dots, I_{n-1}$ $(n-1)$ -мерные некоординатные грани \mathcal{R} с соответствующими внешними нормальными μ^j такими, что для всех мультииндексов $\alpha \in \mathcal{R}_j^{n-1}$ выполняется $(\alpha : \mu^j) = \frac{\alpha_1}{\mu_1^j} + \dots + \frac{\alpha_n}{\mu_n^j} = 1$, $\partial\mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^{I_{n-1}} \mathcal{R}_j^{n-1}$. Для $k > 0$ обозначим $k\mathcal{R} := \{k\alpha = (k\alpha_1, k\alpha_2, \dots, k\alpha_n) : \alpha \in \mathcal{R}\}$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P(x, \mathbb{D}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (1.1)$$

где $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = i^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим

$$P(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \quad (1.2)$$

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$|\xi|_{\mathcal{R}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} |\xi^\alpha|, \quad |\xi|_{\partial\mathcal{R}} = \sum_{\alpha \in \partial\mathcal{R}} |\xi^\alpha|.$$

Определение 1.5. Дифференциальный оператор $P(x, \mathbb{D})$ назовём *регулярным в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если существует постоянная $\delta > 0$ такая, что:

$$1 + |P(x_0, \xi)| \geq \delta |\xi|_{\mathcal{R}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$P(x, \mathbb{D})$ назовём *регулярным в \mathbb{R}^n* , если $P(x, \mathbb{D})$ является регулярным в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$.

$P(x, \mathbb{D})$ назовём *равномерно регулярным в \mathbb{R}^n* , если существует постоянная $\delta > 0$ такая, что:

$$1 + |P(x, \xi)| \geq \delta |\xi|_{\mathcal{R}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Пример 1.1. Рассмотрим некоторые примеры таких дифференциальных операторов.

1. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и \mathcal{R} многогранник Ньютона для точек $(0, 0, \dots, 0)$, $(m, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, m)$. В этом случае определения 1.5 соответствуют определениям эллиптичности с $|\xi|_{\partial\mathcal{R}} = |\xi|_m = \sum_{i=1}^n |\xi_i^m|$.

2. Пусть $\nu \in \mathbb{N}^n$ и \mathcal{R} многогранник Ньютона для точек $(0, 0, \dots, 0)$, $(\nu_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, \nu_n)$. В этом случае определения 1.5 соответствуют определениям квазиэллиптичности с

$$|\xi|_{\partial\mathcal{R}} = |\xi|_\nu = \sum_{i=1}^n |\xi_i^{\nu_i}|.$$

3. Пусть $n = 2$ и \mathcal{R} многогранник Ньютона для точек $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(0, 8)$ и $(6, 4)$. Тогда

$$P(x, \mathbb{D}) = a_1 D_1^8 + a_2 D_1^6 D_2^4 + a_3 D_2^8 + q(x),$$

где $a_1, a_2, a_3 > 0$ и $q \in C(\mathbb{R}^2)$, является регулярным в \mathbb{R}^2 .

4. Пусть $n = 3$ и \mathcal{R} многогранник Ньютона для точек $(0, 0, 0)$, $(8, 0, 0)$, $(0, 8, 0)$, $(6, 4, 0)$, $(6, 0, 6)$, $(0, 6, 6)$ и $(0, 0, 12)$. Тогда

$$P(x, \mathbb{D}) = D_1^8 + D_1^6 D_2^4 + D_2^8 + D_1^6 D_3^6 + D_2^6 D_3^6 + D_3^{12} + q(x),$$

где $q \in C(\mathbb{R}^3)$, является регулярным в \mathbb{R}^3 .

Пусть последовательность $\{a_i\}_{i=0}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ такая, что $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \infty$ и выполняется неравенство $a_{i+1} < \gamma a_i$, где $\gamma > 0$ и $i = 0, 1, \dots$

Аналогично определениям из работ [7] и [22], используя последовательность $\{a_i\}_{i=0}^\infty$, определим специальное покрытие $\{W_m\}_{m=1}^\infty$ для \mathbb{R}^n и системы функций $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ и $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$. Системы функций $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ и $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$ обладают следующими свойствами:

1. $\text{supp } \varphi_m \subset \text{supp } \psi_m \subset W_m$;
2. $\psi_m(x) \varphi_m(x) = \varphi_m(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$;
3. для произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ существует постоянная $C_\alpha > 0$ такая, что:

$$|D^\alpha \psi_m(x)| \leq C_\alpha \left(a_{\lfloor \frac{m-1}{l} \rfloor} \right)^{-|\alpha|}, \quad |D^\alpha \varphi_m(x)| \leq C_\alpha \left(a_{\lfloor \frac{m-1}{l} \rfloor} \right)^{-|\alpha|}, \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, m = 1, 2, \dots;$$

4. $\sum_{m=1}^\infty \varphi_m(x) \equiv 1$.

Обозначим

$$Q := \{g \in C(\mathbb{R}^n) : \exists c > 0 \text{ такая, что } g(x) \geq c, \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Для $k \in \mathbb{Z}_+$ и вполне правильного многогранника \mathcal{R} обозначим через $Q^{k, \mathcal{R}}$ множество весовых функций $g \in Q$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\frac{1}{g(x)} \rightrightarrows 0$ при $|x| \rightarrow \infty$;

2. для $\beta \in k\mathcal{R}, \beta \neq 0$ $D^\beta g(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ и существует $C_\beta > 0$ такая, что $\frac{|D^\beta g(x)|}{g(x)^{1+(\beta:\mu^j)}} \leq C_\beta$ для всех $x \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, I_{n-1}$;
3. для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $m_0 = m_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $m > m_0$ при $\max_{j=1, \dots, l} \text{diam} U_j < \delta$ выполняется:

$$\max_{x, y \in \overline{W}_m} \frac{|g(x) - g(y)|}{g(y)} < \varepsilon, \quad \max_{x, y \in \overline{W}_m} \frac{1}{g(x)^{\frac{1}{\mu_{\max}}} a_{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor}} < \varepsilon,$$

где $\mu_{\max} = \max_{1 \leq i \leq I_{n-1}} \max_{1 \leq s \leq n} \{\mu_s^i\}$.

Примеры весовых функций из множества $Q^{k, \mathcal{R}}$ включают как полиномиальные, так и экспоненциальные весовые функции, например:

$$|x|_{\mathcal{R}}^l, \exp(|x|_{\mathcal{R}}^r) \text{ при } l, r > 0.$$

Для $k \in \mathbb{R}$, вполне правильного многогранника \mathcal{R} и $1 < p < \infty$ обозначим

$$H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{S}' : \|u\|_{k, \mathcal{R}, p} := \|F^{-1}(1 + |\xi|_{\partial \mathcal{R}})^k F u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

где \mathcal{S}' — пространство обобщенных функций медленного роста. Для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обозначим $\dot{H}^{k, \mathcal{R}, p}(\Omega)$ пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{k, \mathcal{R}, p}$.

Для $k \in \mathbb{Z}_+, q \in Q$, вполне правильного многогранника \mathcal{R} и $1 < p < \infty$ обозначим

$$H_q^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u : \|u\|_{H_q^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)} := \|u\|_{k, \mathcal{R}, p, q} := \sum_{\alpha \in k\mathcal{R}} \left\| D^\alpha u \cdot q^{k - \max_i(\alpha: \mu^i)} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

В случае $k \in \mathbb{Z}_+$ и $q \equiv 1$ введённые пространства совпадают.

§ 2. Основные результаты

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$ и $q \in Q$. Рассмотрим дифференциальный оператор $P(x, \mathbb{D})$ (см. (1.1)), представляемый в следующем виде:

$$P(x, \mathbb{D}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha(x) D^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \left(a_\alpha^0(x) q(x)^{1 - \max_i(\alpha: \mu^i)} + a_\alpha^1(x) \right) D^\alpha, \quad (2.1)$$

где $a_\alpha(x) = a_\alpha^0(x)q(x)^{1-\max_i(\alpha;\mu^i)} + a_\alpha^1(x)$, $D^\beta(a_\alpha^0(x)) = O\left(q(x)^{\min(\beta;\mu^i)}\right)$ и $D^\beta(a_\alpha^1(x)) = o\left(q(x)^{1-\max_i(\alpha-\beta;\mu^i)}\right)$ при $|x| \rightarrow \infty$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$, $\beta \in k\mathcal{R}$.

Легко проверить, что $P(x, \mathbb{D})$ порождает линейный ограниченный оператор, действующий из $H_q^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим оператор (2.1) в случае $q \equiv 1$:

$$P(x, \mathbb{D}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha(x) D^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} (a_\alpha^0(x) + a_\alpha^1(x)) D^\alpha. \quad (2.2)$$

Для $N > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$K_N(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq N\}, K_N := K_N(0).$$

В дальнейшем будем использовать следующую теорему, которая является следствием теоремы 7.1 из работы [26]:

Теорема 2.1. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $q \in Q$ и $P(x, \mathbb{D})$ — дифференциальный оператор (2.1). Тогда оператор $P(x, \mathbb{D}) : H_q^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_q^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ является n -нормальным тогда и только тогда, когда существуют постоянные $\kappa > 0$ и $N > 0$ такие, что имеет место оценка

$$\|u\|_{k+1, \mathcal{R}, p, q} \leq \kappa (\|Pu\|_{k, \mathcal{R}, p, q} + \|u\|_{L_p(K_N)}) , \forall u \in H_q^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 2.2. Пусть $P(x, \mathbb{D})$ — дифференциальный оператор (2.2) с коэффициентами, удовлетворяющими $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{x, y \in \overline{W_m}} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$. Пусть существуют постоянные $\kappa > 0$ и $N > 0$ такие, что

$$\|u\|_{k+1, \mathcal{R}, p} \leq \kappa (\|Pu\|_{k, \mathcal{R}, p} + \|u\|_{L_p(K_N)}) , \forall u \in H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n). \quad (2.3)$$

Тогда, $P(x, \mathbb{D})$ регулярен в \mathbb{R}^n , и существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^0(x) \xi^\alpha \right| \geq \delta(1 + |\xi|_{\partial \mathcal{R}}), \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |x| > M. \quad (2.4)$$

Доказательство. Из теоремы 2.1 работы [13] следует, что $P(x, \mathbb{D})$ является регулярным в \mathbb{R}^n . Докажем оценку (2.4).

Пусть $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ — такая последовательность, что $|x_m| \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Без потери общности будем считать, что $x_m \in W_m$. Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим функцию $\tilde{u}_m(x) = \exp(i(\xi, x)) \psi_m(x)$.

Из условий на функции $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$ получим, что для всех $\gamma \in (k+1)\mathcal{R}$, $\gamma \neq 0$ и $\varepsilon > 0$ существуют $\delta(\varepsilon) > 0$ и $m_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для $m > m_0$ и $\max_{j=1, \dots, l} \text{diam} U_j < \delta$ выполняется неравенство:

$$|D^\gamma \psi_m(x)| = \frac{|D^\gamma \psi_m(x)| a_{\lfloor \frac{m-1}{l} \rfloor}^{|\gamma|}}{a_{\lfloor \frac{m-1}{l} \rfloor}^{|\gamma|}} \leq \omega_\gamma(\varepsilon), \quad (2.5)$$

где $\omega_\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для $\beta \in (k+1)\mathcal{R}$ с некоторой постоянной $C_1 > 0$ выполняется:

$$\|D^\beta \tilde{u}_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \geq |\xi^\beta| \|\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} - C_1 \sum_{0 \leq \gamma < \beta} |\xi^\gamma| \|D^{\beta-\gamma} \psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Используя оценку (2.5) и свойства $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$, получим:

$$\|D^\beta \tilde{u}_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \geq |\xi^\beta| \mu(W_m) - \omega_1(\varepsilon) \sum_{0 \leq \gamma < \beta} |\xi^\gamma| \mu(W_m),$$

где $\mu(W_m)$ — мера множества W_m , $\omega_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Тогда нетрудно проверить, что выполняется:

$$\|\tilde{u}_m\|_{k+1, \mathcal{R}, p} \geq \sum_{\beta \in (k+1)\mathcal{R}} |\xi^\beta| \mu(W_m) - \omega_2(\varepsilon) \sum_{\gamma \in (k+1)\mathcal{R}} |\xi^\gamma| \mu(W_m), \quad (2.6)$$

где $\omega_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для $\beta \in k\mathcal{R}$ имеем

$$\begin{aligned} \|D^\beta (P(x, \mathbb{D}) \tilde{u}_m)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\leq \left\| D^\beta \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^0(x) \tilde{u}_m \right) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \left\| D^\beta \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^1(x) D^\alpha \tilde{u}_m \right) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Учитывая, что $D^\beta (a_\alpha^1(x)) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$, $\beta \in k\mathcal{R}$ и (2.5), нетрудно проверить, что для достаточно большого m_0 и $m > m_0$ выполняется:

$$\left\| D^\beta \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^1(x) D^\alpha \tilde{u}_m \right) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \omega_3(\varepsilon) \sum_{\gamma \in (k+1)\mathcal{R}} |\xi^\gamma| \mu(W_m), \quad (2.8)$$

где $\omega_3(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из условий (2.2), $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{x, y \in W_m} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$, следует, что для $\alpha \in \mathcal{R}$ и $\beta \in k\mathcal{R}$ при достаточно большом m_0 и достаточно малом $\max_{j=1, \dots, l} \text{diam} U_j$, для $m > m_0$ выполняется:

$$|D^\beta (a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(x_m))| \leq \tau_{\alpha, \beta}(\varepsilon), \quad (2.9)$$

где $\tau_{\alpha, \beta}(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Используя (2.9) и по аналогии с доказательством теоремы 3.4 из работы [24], получим, что для достаточно большого m_0 и $m > m_0$ выполняется оценка:

$$\begin{aligned} \left\| D^\beta \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^0(x) D^\alpha \tilde{u}_m \right) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\leq \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^0(x_m) \xi^\alpha \right| |\xi^\beta| \|\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &+ C_2 \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \sum_{0 \leq \gamma < \beta + \alpha} |\xi^\gamma| \|D^{\beta + \alpha - \gamma} \psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &+ \omega_4(\varepsilon) \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \sum_{0 \leq \gamma_1 + \gamma_2 \leq \beta + \alpha} |\xi^{\gamma_1}| \|D^{\gamma_2} \psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^0(x_m) \xi^\alpha \right| |\xi^\beta| \mu(W_m) + \widetilde{\omega}_4(\varepsilon) \sum_{\gamma \in (k+1)\mathcal{R}} |\xi^\gamma| \mu(W_m), \quad (2.10) \end{aligned}$$

где $\omega_4(\varepsilon) \rightarrow 0, \widetilde{\omega}_4(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из оценок (2.8)–(2.10) для достаточно большого m_0 и всех $m > m_0$ получим

$$\begin{aligned} \|P\tilde{u}_m\|_{k, \mathcal{R}, p} &\leq \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^0(x_m) \xi^\alpha \right| \sum_{\beta \in k\mathcal{R}} |\xi^\beta| \mu(W_m) \\ &+ \omega_5(\varepsilon) \sum_{\gamma \in (k+1)\mathcal{R}} |\xi^\gamma| \mu(W_m), \quad (2.11) \end{aligned}$$

где $\omega_5(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Тогда, применяя (2.3), (2.6) и (2.11), получим

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \in (k+1)\mathcal{R}} |\xi^\beta| \mu(W_m) - \omega_2(\varepsilon) \sum_{\gamma \in (k+1)\mathcal{R}} |\xi^\gamma| \mu(W_m) \\ \leq \kappa \left(\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^0(x_m) \xi^\alpha \right| \sum_{\beta \in k\mathcal{R}} |\xi^\beta| \mu(W_m) \right. \\ \left. + \omega_5(\varepsilon) \sum_{\gamma \in (k+1)\mathcal{R}} |\xi^\gamma| \mu(W_m) \right). \end{aligned}$$

Так как $\{a_\alpha^0(x) : \alpha \in \mathcal{R}\}$ — ограниченные функции и $x_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, то существуют сходящиеся подпоследовательности последовательностей $\{a_\alpha^0(x_m) : \alpha \in \mathcal{R}\}$. Без ограничения общности будем считать, что последовательности $\{a_\alpha^0(x_m) : \alpha \in \mathcal{R}\}$ сходятся. Тогда для каждого $\alpha \in \mathcal{R}$ существует постоянная \tilde{a}_α^0 такая, что $a_\alpha^0(x_m) \rightrightarrows \tilde{a}_\alpha^0$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда выбрав m_0 достаточно большим, для $m > m_0$ получим неравенство:

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta \in (k+1)\mathcal{R}} |\xi^\beta| - \omega_6(\varepsilon) \sum_{\gamma \in (k+1)\mathcal{R}} |\xi^\gamma| \\ & \leq \kappa \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \tilde{a}_\alpha^0 \xi^\alpha \right| \sum_{\beta \in k\mathcal{R}} |\xi^\beta|, \end{aligned}$$

где $\omega_6(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Выбирая ε достаточно малым, получим, что с некоторой постоянной $C_3 > 0$ выполняется:

$$C_3 \sum_{\beta \in (k+1)\mathcal{R}} |\xi^\beta| \leq \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \tilde{a}_\alpha^0 \xi^\alpha \right| \sum_{\beta \in k\mathcal{R}} |\xi^\beta|.$$

Из этого неравенства, получим, что существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \tilde{a}_\alpha^0 \xi^\alpha \right| \geq \delta(1 + |\xi|_{\partial\mathcal{R}}).$$

Так как последнее неравенство выполняется для всех частичных пределов последовательностей $\{a_\alpha^0(x_m) : \alpha \in \mathcal{R}\}$, где $|x_m| \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, заключаем, что существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^0(x) \xi^\alpha \right| \geq \delta(1 + |\xi|_{\partial\mathcal{R}}), \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |x| > M.$$

□

Замечание 2.1. Из теоремы 2.2 следует, что для оператора $P(x, \mathbb{D}) = \sum_{\alpha \in \partial\mathcal{R}} a_\alpha(x) D^\alpha : H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ априорная оценка (2.3) не может выполняться. Следовательно, по теореме 2.1 оператор не является n -нормальным. Теорема 2.2 показывает, что для выполнения априорной оценки вида (2.3), наряду с регулярностью $P(x, \mathbb{D})$, необходимым также является условие (2.4). В работе [22] аналогичный результат установлен в случае весовой шкалы пространств $H_q^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ при $q \in Q^{k, \mathcal{R}}$.

Установлено, что эти условия на символ оператора также являются достаточными для выполнения априорной оценки (2.3) в рассматриваемых пространствах.

Теорема 2.3. Пусть $P(x, \mathbb{D})$ — дифференциальный оператор (2.2) с коэффициентами, удовлетворяющими $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{x, y \in \overline{W}_m} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$. Пусть $P(x, \mathbb{D})$ является регулярным в \mathbb{R}^n , и существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^0(x) \xi^\alpha \right| \geq \delta(1 + |\xi|_{\partial \mathcal{R}}), \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |x| > M. \quad (2.12)$$

Тогда существуют постоянные $\kappa > 0$ и $N > 0$ такие, что

$$\|u\|_{k+1, \mathcal{R}, p} \leq \kappa (\|Pu\|_{k, \mathcal{R}, p} + \|u\|_{L_p(K_N)}), \forall u \in H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n). \quad (2.13)$$

Доказательство. Обозначим

$$P_0(x, \mathbb{D}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^0(x) D^\alpha,$$

$$P^m(x, \mathbb{D}) := \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} [\psi_m(x) (a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(x_m)) + a_\alpha^0(x_m)] D^\alpha, m = 1, 2, \dots$$

Учитывая свойства системы функций $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, получим, что для всех $\gamma \in k\mathcal{R}$, $\gamma \neq 0$ и $\varepsilon > 0$ существуют $\delta(\varepsilon) > 0$ и $m_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $m > m_0$ и $\max_{j=1, \dots, l} \text{diam } U_j < \delta$ выполняется неравенство:

$$|D^\gamma \varphi_m(x)| = \frac{|D^\gamma \varphi_m(x)| a_{\lfloor \frac{m-1}{l} \rfloor}^{|\gamma|}}{a_{\lfloor \frac{m-1}{l} \rfloor}^{|\gamma|}} \leq \omega_\gamma(\varepsilon), \quad (2.14)$$

где $\omega_\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Аналогичные неравенства выполняются и для функций $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$.

Используя эти оценки, лемму 3.1 из работы [25] и условия на коэффициенты $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{x, y \in \overline{W}_m} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$, аналогично доказательству теоремы 2.2 из работы [12], можно проверить, что при достаточно большом m_0 для всех $m > m_0$ операторы $P^m(x, \mathbb{D}) : H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ имеют ограниченные обратные операторы, причем нормы этих обратных операторов равномерно ограничены благодаря условию (2.4).

Так как $P^m(\varphi_m u) = P_0(\varphi_m u)$ для всех $u \in H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ и $m > m_0$, получим, что с некоторой постоянной $C_1 > 0$ выполняется:

$$\begin{aligned} \|\varphi_m u\|_{k+1, \mathcal{R}, p} &\leq C_1 \|P^m(\varphi_m u)\|_{k, \mathcal{R}, p} \\ &\leq C_1 \|P_0(\varphi_m u)\|_{k, \mathcal{R}, p}, \quad \forall u \in H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Используя свойства функций $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ и оценку (2.14), можно показать, что при достаточно большом m_0 и достаточно малом $\max_{j=1, \dots, l} \text{diam } U_j$ для $m > m_0$ существуют такие константы $C_2, C_3 > 0$, что выполняется оценка:

$$\begin{aligned} &\|\varphi_m P_0 u - P_0(\varphi_m u)\|_{k, \mathcal{R}, p}^p \\ &\leq C_2 \left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \sum_{\beta + \gamma = \alpha, |\gamma| > 0} a_\alpha^0(x) D^\beta u D^\gamma \varphi_m \right\|_{k, \mathcal{R}, p}^p \\ &\leq C_3 \left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \sum_{\beta + \gamma = \alpha, |\gamma| > 0} a_\alpha^0(x) D^\beta u D^\gamma \varphi_m \right\|_{k, \mathcal{R}, p}^p \\ &\leq \omega(\varepsilon) \|u\|_{H^{k+1, \mathcal{R}, p}(W_m)}^p, \end{aligned}$$

где $\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Продолжение доказывается аналогично схеме из теоремы 2.3 в работе [22]. \square

Из теорем 2.1, 2.2 и 2.3 непосредственно следует

Следствие 2.1. Пусть $P(x, \mathbb{D})$ — дифференциальный оператор (2.2) с коэффициентами, удовлетворяющими $\lim_{p \rightarrow \infty} \max_{x, y \in \overline{W}_p} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$.

Тогда оператор $P(x, \mathbb{D}) : H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ является n -нормальным тогда и только тогда, когда $P(x, \mathbb{D})$ является регулярным в \mathbb{R}^n , и существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^0(x) \xi^\alpha \right| \geq \delta(1 + |\xi|_{\partial \mathcal{R}}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |x| > M. \quad (2.15)$$

Из теоремы 2.3 и выкладок, аналогичных доказательству теоремы 15.1 в работе [28], получим

Следствие 2.2. Пусть $P(x, \mathbb{D})$ — регулярный в \mathbb{R}^n дифференциальный оператор вида (2.2), коэффициенты которого удовлетворяют условиям $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{x, y \in \overline{W}_m} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$, и существуют постоянные

$\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_{\alpha}^0(x) \xi^{\alpha} \right| \geq \delta (1 + |\xi|_{\partial \mathcal{R}}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |x| > M. \quad (2.16)$$

Тогда, если $u \in H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$, $P(x, \mathbb{D})u \in H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$, то $u \in H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$.

Далее будем использовать следующую теорему (см. теорему 3.14 в [27]):

Теорема 2.4. Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y . Тогда имеют место следующие утверждения:

1. если оператор A обладает левым регуляризатором, тогда ядро оператора A в X конечномерно;
2. если оператор A обладает правым регуляризатором, тогда образ оператора A замкнут и коядро конечномерно в Y ;
3. оператор A обладает левым и правым регуляризатором тогда и только тогда, когда A фредгольмов.

Теорема 2.5. Пусть $P(x, \mathbb{D})$ — дифференциальный оператор (2.2) с коэффициентами, удовлетворяющими $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{x, y \in W_m} |a_{\alpha}^0(x) - a_{\alpha}^0(y)| = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$.

Тогда оператор $P(x, \mathbb{D}) : H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ является фредгольмовым тогда и только тогда, когда $P(x, \mathbb{D})$ является регулярным в \mathbb{R}^n , и существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_{\alpha}^0(x) \xi^{\alpha} \right| \geq \delta (1 + |\xi|_{\partial \mathcal{R}}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |x| > M. \quad (2.17)$$

Доказательство. Из фредгольмовости оператора следует его n -нормальность, следовательно, необходимость вытекает из теорем 2.1 и 2.2.

Докажем достаточность. Приведём построение левого и правого регуляризатора.

Пусть $x_m \in W_m$, $m = 1, 2, \dots$. Обозначим

$$P^m(x, \mathbb{D}) := \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} (\psi_m(x) (a_{\alpha}(x) - a_{\alpha}(x_m)) + a_{\alpha}(x_m)) D^{\alpha},$$

$$P^{m,0}(x, \mathbb{D}) := \sum_{\alpha \in \partial \mathcal{R}} (\psi_m(x) (a_{\alpha}(x) - a_{\alpha}(x_m)) + a_{\alpha}(x_m)) D^{\alpha},$$

$$R^{m,0} := F^{-1} \frac{|\xi|_{\partial\mathcal{R}}}{(1 + |\xi|_{\partial\mathcal{R}})P^{m,0}(x_m, \xi)} F.$$

Пусть $m_0 \in \mathbb{N}$. Так как $P(x, \mathbb{D})$ регулярен в \mathbb{R}^n , то при достаточно малых диаметрах покрытия $\{W_m\}_{m=1}^{m_0}$, из леммы 3.1 работы [24] следует, что для $m \leq m_0$ имеет место представление

$$P^m(x, \mathbb{D})R^{m,0} = I + T_1^m + T_2^m, \quad (2.18)$$

где $T_1^m : H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k+\sigma, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$, $\sigma = \sigma(\mathcal{R}) > 0$, а оператор $T_2^m : H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\|T_2^m\| < 1$.

Обозначим

$$R^m := R^{m,0}(I + T_2^m)^{-1}.$$

Аналогично доказательству теоремы 2.3, можно взять m_0 достаточно большим, так что для $m > m_0$ операторы $P^m : H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ имеют равномерно ограниченные обратные операторы $R^m : H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим

$$Rf := \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l R^l(\varphi_l f), \quad f \in H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n). \quad (2.19)$$

Аналогично доказательству теоремы 3.6 из работы [24], можно проверить, что выполняется:

$$P(x, \mathbb{D})Ru = u + \phi T_1 u + T_2 u,$$

где $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $T_1 : H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k+\sigma, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$, $\sigma = \sigma(\mathcal{R}) > 0$, а оператор $T_2 : H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\|T_2\| < 1$.

Так как $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \phi \subset K_{N_1}$ для некоторого $N_1 > 0$, и $T_1 : H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k+\sigma, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ с некоторой $\sigma = \sigma(\mathcal{R}) > 0$, то существуют постоянные $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \|\phi T_1 u\|_{k, \mathcal{R}, p} &\leq C_1 \|\phi T_1 u\|_{\dot{H}^{k, \mathcal{R}, p}(K_{N_1})} \leq C_2 \|\phi T_1 u\|_{\dot{H}^{k+\sigma, \mathcal{R}, p}(K_{N_1})} \\ &\leq C_3 \|u\|_{\dot{H}^{k, \mathcal{R}, p}(K_{N_1})} \leq C_4 \|u\|_{k, \mathcal{R}, p}, \quad \forall u \in H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Из последней оценки в силу компактности вложений $\dot{H}^{k+\sigma, \mathcal{R}, p}(K_{N_1})$ в $\dot{H}^{k, \mathcal{R}, p}(K_{N_1})$, получим, что $\phi T_1 : H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ компактен.

Так как оператор $T_2 : H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\|T_2\| < 1$, существует $(I + T_2)^{-1}$. Применяя этот оператор к обеим частям, получим

$$P(x, \mathbb{D})\tilde{R}u = u + \tilde{T}u,$$

где $\tilde{R} := R(I + T_2)^{-1}$, а $\tilde{T} := \phi T_1(I + T_2)^{-1} : H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ является компактным оператором, так как ϕT_1 компактен.

Применяя теорему 2.4, заключаем, что коядро оператора $P(x, \mathbb{D}) : H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ имеет конечную размерность.

Аналогично строится левый регуляризатор, что завершает доказательство фредгольмовости оператора. \square

Обозначим

$$\text{Ker}(P; H^{k, \mathcal{R}, p}) := \{u \in H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) : P(x, \mathbb{D})u = 0\},$$

$$\text{Im}(P; H^{k, \mathcal{R}, p}) := \{f \in H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) : \exists u \in H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \text{ s.t. } P(x, \mathbb{D})u = f\},$$

$$\text{coker}(P; H^{k, \mathcal{R}, p}) := H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) / \overline{\text{Im}(P; H^{k, \mathcal{R}, p})},$$

$$\text{ind}(P; H^{k, \mathcal{R}, p}) := \dim \text{Ker}(P; H^{k, \mathcal{R}, p}) - \dim \text{coker}(P; H^{k, \mathcal{R}, p}).$$

Следствие 2.3. Пусть $P(x, \mathbb{D})$ — регулярный в \mathbb{R}^n дифференциальный оператор вида (2.2), коэффициенты которого удовлетворяют условиям $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{x, y \in \overline{W_m}} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$, и выполняется (2.17).

Тогда $\text{Ker}(P; H^{k, \mathcal{R}, p})$, $\text{coker}(P; H^{k, \mathcal{R}, p})$ и $\text{ind}(P; H^{k, \mathcal{R}, p})$ не зависят от k и p .

Доказательство. Используя следствие 2.2 и лемму 2.1 из работы [13], можно проверить, что $\text{Ker}(P; H^{k, \mathcal{R}, p})$, $\text{coker}(P; H^{k, \mathcal{R}, p})$, и $\text{ind}(P; H^{k, \mathcal{R}, p})$ не зависят от k . Далее, в силу теоремы 2.5 и построения регуляризатора, существует оператор $R : H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ такой, что $RP(x, \mathbb{D})u = u + \phi Tu$, где $\phi \in C_0^\infty(K_N)$ для некоторого $N > 0$, независящего от p , $T : H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k+\sigma, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ с некоторой $\sigma = \sigma(\mathcal{R}) > 0$. Тогда, используя последнее представление и следствие 3.2 работы [25], нетрудно проверить, что выполняется:

$$\text{Ker}(P; H^{k, \mathcal{R}, p}) \subset \bigcap_{s \geq 0} H_{loc}^{s, \mathcal{R}, p}(K_N) = C^\infty(K_N).$$

Следовательно, $\text{Ker}(P; H^{k, \mathcal{R}, p})$ не зависит от p . Аналогично, можно доказать, что $\text{coker}(P; H^{k, \mathcal{R}, p})$ не зависит от p . Тем самым, получили, что $\text{ind}(P; H^{k, \mathcal{R}, p})$ не зависит от p . \square

Предложение 2.1. Пусть $P(x, \mathbb{D})$ — регулярный в \mathbb{R}^n дифференциальный оператор (2.2), и существуют постоянные \tilde{a}_α такие, что $a_\alpha(x) \rightrightarrows \tilde{a}_\alpha$ при $|x| \rightarrow \infty$, $\alpha \in \mathcal{R}$. Тогда

$$\sigma_e(P) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \tilde{a}_\alpha \xi^\alpha : \xi \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

При этом, для $\lambda \notin \sigma_e(P)$ имеет место $\text{ind}(P - \lambda I) = 0$.

Доказательство. Из теоремы 2.5 и условий на коэффициенты следует, что оператор $P(x, \mathbb{D}) - \lambda I : H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ является фредгольмовым тогда и только тогда, когда существует постоянная $\delta > 0$, такая, что

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \tilde{a}_\alpha \xi^\alpha - \lambda \right| \geq \delta(1 + |\xi|_{\partial \mathcal{R}}), \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.20)$$

Отсюда, если $\lambda \in \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \tilde{a}_\alpha \xi^\alpha : \xi \in \mathbb{R}^n \right\}$, то (2.20) не выполняется, следовательно, $\lambda \in \sigma_e(P)$.

Пусть $\lambda \in \sigma_e(P)$. Если бы выполнялось $\sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \tilde{a}_\alpha \xi^\alpha - \lambda \neq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, то, в силу регулярности $P(x, \mathbb{D})$, получили бы условие (2.20), и, следовательно, $\lambda \notin \sigma_e(P)$, что противоречит предположению.

$$\text{Тем самым, } \sigma_e(P) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \tilde{a}_\alpha \xi^\alpha : \xi \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

При $\lambda \notin \sigma_e(P)$ выполняется условие (2.20) и оператор $\tilde{P}(\mathbb{D}) - \lambda I := \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \tilde{a}_\alpha D^\alpha - \lambda I : H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ является обратимым. Тогда, используя теорему 3.18 из работы [27], теорему 2.5 и условие (2.20), нетрудно проверить, что $\text{ind}(P - \lambda I) = \text{ind}(\tilde{P} - \lambda I) = 0$. \square

Замечание 2.2. Для операторов из предложения 2.1 $\text{ind}(P - \lambda I) = 0$ при $\lambda \notin \sigma_e(P)$, но оператор может не быть изоморфизмом и размерности ядра и коядра могут быть ненулевыми. В качестве примера рассмотрим оператор $Pu = u'' + \frac{2-x^2\sqrt{1+x^2}}{4(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}u$, действующий из $H^2(\mathbb{R}^1)$ в $L_2(\mathbb{R}^1)$, где $H^2(\mathbb{R}^1)$ — изотропное пространство Соболева второго порядка при $p = 2$. Для него выполняется

$$\text{Ker}(P) = \text{Span}\left\{\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right)\right\}, \dim \text{Ker}(P) = \dim \text{coker}(P) = 1.$$

Следовательно, $\text{ind}(P) = 0$. Существенный спектр этого оператора выражается следующим образом: $\sigma_e(P) = \{-\xi^2 - \frac{1}{4} : \xi \in \mathbb{R}\} = (-\infty, -\frac{1}{4}]$.

Теорема 2.6. Пусть $P(x, \mathbb{D})$ — регулярный в \mathbb{R}^n дифференциальный оператор (2.2) с коэффициентами, удовлетворяющими следующим условиям: $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{x, y \in \bar{W}_m} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$. Тогда

$$\sigma_e(P) = \tilde{L} := \bigcup_{(\tilde{a}_\alpha)} \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \tilde{a}_\alpha \xi^\alpha, \xi \in \mathbb{R}^n \right\},$$

где \tilde{a}_α такие, что существует $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, $|x_k| \rightarrow \infty$ и $a_\alpha^0(x_k) \rightarrow \tilde{a}_\alpha$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$.

Доказательство. Из теоремы 2.5 и условий на коэффициенты следует, что оператор $P(x, \mathbb{D}) - \lambda I : H^{k+1, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k, \mathcal{R}, p}(\mathbb{R}^n)$ является фредгольмовым тогда и только тогда, когда существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$, такие что

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha} - \lambda \right| \geq \delta(1 + |\xi|_{\partial \mathcal{R}}), \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |x| > M. \quad (2.21)$$

Пусть $\lambda \in \tilde{L}$. Тогда условие (2.21) не выполняется, и, следовательно, $\lambda \in \sigma_e(P)$.

Пусть теперь $\lambda \in \sigma_e(P)$. Тогда условие (2.21) не выполняется, что значит, что для последовательности $\delta_k > 0, M_k > 0, \delta_k \rightarrow 0, M_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, существуют $|x_k| > M_k$ и $\xi_k \in \mathbb{R}^n$, что имеет место:

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_{\alpha}(x_k) \xi_k^{\alpha} - \lambda \right| < \delta_k(1 + |\xi_k|_{\partial \mathcal{R}}). \quad (2.22)$$

Без потери общности можно считать, что $a_{\alpha}(x_k) \rightarrow \tilde{a}_{\alpha}$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда, если предположить, что $\sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \tilde{a}_{\alpha} \xi^{\alpha} - \lambda \neq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, то в силу регулярности $P(x, \mathbb{D})$ получим, что с некоторой $\delta > 0$ выполняется $\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \tilde{a}_{\alpha} \xi^{\alpha} - \lambda \right| \geq \delta(1 + |\xi|_{\partial \mathcal{R}})$, что противоречит условию (2.22). То есть получили, что $\lambda \in \tilde{L}$.

Тем самым, представление для $\sigma_e(P)$ доказано. \square

Замечание 2.3. Для операторов из теоремы 2.6 $\text{ind}(P - \lambda I)$ может меняться для различных значений $\lambda \notin \sigma_e(P)$.

Рассмотрим $Pu = u''$, действующий из $H^2(\mathbb{R}^1)$ в $L_2(\mathbb{R}^1)$.

При $\lambda > 0$ оператор $P - \lambda I : H^2(\mathbb{R}^1) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^1)$ является фредгольмовым с $\dim \text{Ker}(P - \lambda I) = \dim \text{coker}(P - \lambda I) = \text{ind}(P - \lambda I) = 0$, а при $\lambda \leq 0$ не является фредгольмовым.

Пусть $\delta > 0$. Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} (P_{\delta} - \lambda I)u &= e^{-\delta\sqrt{1+x^2}}(P - \lambda I) \left(e^{\delta\sqrt{1+x^2}} u \right) = u'' + 2\delta \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} u' + \\ &+ \left(\delta^2 \frac{x^2}{1+x^2} + \delta \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} - \lambda \right) u. \end{aligned}$$

Если $\lambda < 0$, то $P_{\delta} - \lambda I : H^2(\mathbb{R}^1) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^1)$ является фредгольмовым по

теореме 2.6 и выполняется:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(P_\delta - \lambda I) &= \text{Span}\{\cos(\sqrt{|\lambda|x})e^{-\delta\sqrt{1+x^2}}; \sin(\sqrt{|\lambda|x})e^{-\delta\sqrt{1+x^2}}\}, \\ \dim \text{Ker}(P_\delta - \lambda I) &= 2, \text{Ker}((P_\delta - \lambda I)^*) = \{0\}, \\ \dim \text{coker}(P_\delta - \lambda I) &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае $\text{ind}(P_\delta - \lambda I) = 2$.

Если $\lambda > \delta^2$, аналогично, легко проверить, что $\dim \text{Ker}(P_\delta - \lambda I) = \dim \text{coker}(P_\delta - \lambda I) = \text{ind}(P_\delta - \lambda I) = 0$.

Для этого оператора имеем: $\sigma_e(P) = \{-\xi^2 \pm 2i\delta\xi + \delta^2 : \xi \in \mathbb{R}\}$.

В работе [23] был получен аналогичный критерий фредгольмовости для регулярных гипоеллиптических операторов на шкале весовых пространств $H_q^{k, \mathcal{R}, p}$ с весовой функцией $q \in Q^{k, \mathcal{R}}$, а также исследованы их спектральные характеристики. Спектральные свойства в этом случае отличаются от случая $q \equiv 1$: существенный спектр оказывается пустым множеством.

Теорема 2.7. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $q \in Q^{k, \mathcal{R}}$ и $P(x, \mathbb{D})$ — регулярный в \mathbb{R}^n дифференциальный оператор (2.1), коэффициенты которого удовлетворяют $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{x, y \in \overline{W_m}} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$. Пусть существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^0(x) \xi^\alpha \right| \geq \delta(1 + |\xi|_{\partial \mathcal{R}}), \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |x| > M. \quad (2.23)$$

Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор является фредгольмовым и спектр $\sigma(P)$ имеет одну из следующих форм:

- $\sigma(P) = \mathbb{C}$;
- $\sigma(P)$ — дискретное множество, при этом $\text{ind}(P; H_q^{k, \mathcal{R}, p}) = 0$.

Список литературы

1. Хермандер Л. *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*. М.: Мир, 1965.
2. Никольский С. М. Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения // *Докл. АН СССР*. 1962. Т. 146, № 4. С. 767–769.
3. Михайлов В. П. О поведении на бесконечности одного класса многочленов // *Тр. МИАН*. 1967. Т. 91. С. 59–81.

4. Friberg J. Multi-quasi-elliptic polynomials // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*. 1967. V. 21. P. 239–260.
5. Volevich L.R., Gindikin S.G. The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.
6. Ghazaryan H.G. The Newton polyhedron, spaces of differentiable functions and general theory of differential equations // *Armenian Journal of Mathematics*. 2017. V. 9, N 2. P. 102–145.
7. Багиров Л. А. Эллиптические уравнения в неограниченной области // *Матем. сб.* 1971. Т. 86. С. 121–139.
8. McOwen R. C. On elliptic operators in \mathbb{R}^n // *Communications in Partial Differential Equations*. 1980. V. 5, N 8. P. 913–933.
9. Lockhart R. B., McOwen R. C. On elliptic systems in \mathbb{R}^n // *Acta Math.* 1983. V. 150. P. 125–135.
10. Schrohe E. Spectral invariance, ellipticity, and the Fredholm property for pseudodifferential operators on weighted Sobolev spaces // *Annals of Global Analysis and Geometry*. 1992. V. 10, N 3. P. 237–254.
11. Багиров Л. А. Априорные оценки, теоремы существования и поведение на бесконечности решений квазиэллиптических уравнений в \mathbb{R}^n // *Матем. сб.* 1979. Т. 110, № 4. С. 475–492.
12. Karapetyan G. A., Darbinyan A. A. Index of semielliptic operator in \mathbb{R}^n // *Proceedings of the NAS Armenia: Mathematics*. 2007. V. 42, N 5. P. 33–50.
13. Tumanyan A. G. On the invariance of index of semielliptical operator on the scale of anisotropic spaces // *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*. 2016. V. 51, N 4. P. 187–198.
14. Darbinyan A. A., Tumanyan A. G. On index stability of Noetherian differential operators in anisotropic Sobolev spaces // *Eurasian Math. Journal*. 2019. V. 10, N 1. P. 9–15.
15. Tumanyan A. G. On the Fredholm property of semielliptic operators in anisotropic weighted Sobolev spaces in \mathbb{R}^n // *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*. 2021. V. 56, N 3. P. 168–181.
16. Демиденко Г. В. О квазиэллиптических операторах в \mathbb{R}^n // *Сиб. матем. журн.* 1998. Т. 39, № 5. С. 1028–1037.

17. Демиденко Г.В. Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа // *Сиб. матем. журн.* 2008. Т. 49, № 5. С. 1064–1076.
18. Демиденко Г.В. Квазиэллиптические операторы и уравнения, не разрешенные относительно старшей производной // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.* 2016. Т. 16, № 3. С. 15–26.
19. Boggiatto P., Buzano E., Rodino L. Multi-quasi-elliptic operators in \mathbb{R}^n // *Partial Differential Operators and Mathematical Physics, Proceedings Holzau.* 1995. P. 31–42.
20. Buzano E., Ziggioto A. Weyl formula for multi-quasi-elliptic operators of Schrödinger type // *Annali di Matematica.* 2001. V. 180. P. 223–243.
21. Buzano E., Ziggioto A. On the essential spectrum of the hypoelliptic pseudodifferential operators // *Mathematische Nachrichten.* 2008. V. 281, N 1. P. 5–24.
22. Tumanyan A. G. A Priori Estimates and Fredholm Criteria for a Class of Regular Hypoelliptic Operators // *Siberian Adv. Math.* 2023. V. 33, N 2. P. 151–164.
23. Tumanyan A. G. Normal solvability and Fredholm properties for special classes of hypoelliptic operators // *Electronic Journal of Differential Equations.* 2025. Conf. 26. P. 201–217.
24. Tumanyan A. G. Fredholm criteria for a class of regular hypoelliptic operators in multianisotropic spaces in \mathbb{R}^n // *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics.* 2022. V. 48. P. 1009–1028.
25. Tumanyan A. G. Fredholm property of regular hypoelliptic operators on the scales of multianisotropic spaces // *ITM Web of Conferences.* 2022. V. 49. P. 1–13.
26. Крейн С.Г. *Линейные уравнения в банаховых пространствах.* Москва: Наука, 1971.
27. Edmunds D.E., Evans W.D. *Spectral theory and differential operators.* Oxford: Oxford University Press, 1987.
28. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. // *Communications on Pure and Applied Mathematics.* 1959. V. 12. P. 623–727.

References

1. Hörmander L. *Linear Partial Differential Operators*. Moscow: Mir Publishers, 1965 (Russian).
2. Nikolskii S.M. The first boundary value problem for a general linear equation // *Doklady of the USSR Academy of Sciences*. 1962. V.146, N4. P.767–769 (Russian).
3. Mikhailov V.P. On the behavior at infinity of a class of polynomials // *Proc. Steklov Inst. Math*. 1967. V.91. P.61–82 (Russian).
4. Friberg J. Multi-quasi-elliptic polynomials // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*. 1967. V.21. P.239–260.
5. Volevich L.R., Gindikin S.G. *The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.
6. Ghazaryan H.G. The Newton polyhedron, spaces of differentiable functions and general theory of differential equations // *Armenian Journal of Mathematics*. 2017. V.9, N2. P.102–145.
7. Bagirov L.A. Elliptic equations in an unbounded domain // *Math. USSR-Sb*. 1971. V.86. P.121–139 (Russian).
8. McOwen R.C. On elliptic operators in \mathbb{R}^n // *Communications in Partial Differential Equations*. 1980. V.5, N8. P.913–933.
9. Lockhart R.B., McOwen R.C. On elliptic systems in \mathbb{R}^n // *Acta Mathematica*. 1983. V.150. P.125–135.
10. Schrohe E. Spectral invariance, ellipticity, and the Fredholm property for pseudodifferential operators on weighted Sobolev spaces // *Annals of Global Analysis and Geometry*. 1992. V.10, N3. P.237–254.
11. Bagirov L.A. A priori estimates, existence theorems, and behavior at infinity of solutions to quasi-elliptic equations in \mathbb{R}^n // *Math. USSR-Sb*. 1979. V.110, N4. P.475–492 (Russian).
12. Karapetyan G.A., Darbinyan A.A. Index of semi-elliptic operator in \mathbb{R}^n // *Proceedings of the NAS of Armenia: Mathematics*. 2007. V.42, N5. P.33–50.

13. Tumanyan A. G. On the invariance of the index of a semi-elliptic operator on the scale of anisotropic spaces // *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*. 2016. V. 51, N 4. P. 187–198.
14. Darbinyan A. A., Tumanyan A. G. On index stability of Noetherian differential operators in anisotropic Sobolev spaces // *Eurasian Mathematical Journal*. 2019. V. 10, N 1. P. 9–15.
15. Tumanyan A. G. On the Fredholm property of semi-elliptic operators in anisotropic weighted Sobolev spaces in \mathbb{R}^n // *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*. 2021. V. 56, N 3. P. 168–181.
16. Demidenko G. V. On quasi-elliptic operators in \mathbb{R}^n // *Siberian Math. J.* 1998. V. 39, N 5. P. 884–893.
17. Demidenko G. V. Quasi-elliptic operators and equations of Sobolev type // *Siberian Math. J.* 2008. V. 49, N 5. P. 842–851.
18. Demidenko G. V. Quasi-elliptic operators and equations not resolved with respect to the highest derivative // *J. Math. Sci.* 2018. V. 230, N 1. P. 25–35.
19. Boggiatto P., Buzano E., Rodino L. Multi-quasi-elliptic operators in \mathbb{R}^n // *Partial Differential Operators and Mathematical Physics, Proceedings Holzau*. 1995. P. 31–42.
20. Buzano E., Ziggioto A. Weyl formula for multi-quasi-elliptic operators of Schrödinger type // *Annali di Matematica*. 2001. V. 180. P. 223–243.
21. Buzano E., Ziggioto A. On the essential spectrum of hypoelliptic pseudodifferential operators // *Mathematische Nachrichten*. 2008. V. 281, N 1. P. 5–24.
22. Tumanyan A. G. A Priori Estimates and Fredholm Criteria for a Class of Regular Hypoelliptic Operators // *Siberian Adv. Math.* 2023. V. 33, N 2. P. 151–164.
23. Tumanyan A. G. Normal solvability and Fredholm properties for special classes of hypoelliptic operators // *Electronic Journal of Differential Equations*. 2025. Conf. 26. P. 201–217.
24. Tumanyan A. G. Fredholm criteria for a class of regular hypoelliptic operators in multianisotropic spaces in \mathbb{R}^n // *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2022. V. 48. P. 1009–1028.

25. *Tumanyan A. G.* Fredholm property of regular hypoelliptic operators on the scales of multianisotropic spaces // *ITM Web of Conferences*. 2022. V. 49. P. 1–13.
26. *Krein S. G.* *Linear Equations in Banach Spaces*. Moscow: Nauka, 1971 (Russian).
27. *Edmunds D. E., Evans W. D.* *Spectral Theory and Differential Operators*. Oxford: Oxford University Press, 1987.
28. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1959. V. 12. P. 623–727.

Информация об авторе

Ани Гагиковна Туманян, кандидат физико-математических

наук, доцент

SPIN 7635-3376 AuthorID: 1332531

Scopus Author ID 57194708961

Author Information

Ani G. Tumanyan, Candidate of Mathematics, Associate Professor

SPIN 7635-3376 AuthorID: 1332531

Scopus Author ID 57194708961

*Статья поступила в редакцию 22.09.2025;
одобрена после рецензирования 11.02.2026; принята к публикации
06.05.2026*

*The article was submitted 22.09.2025;
approved after reviewing 11.02.2026; accepted for publication 06.05.2026*